0002320369767999

東洋大学

2016年 理工・生命科学・食環境科学 第4問

数理 石井K

4 xy 平面において，点Pが単位円周上の $y \geqq 0$ の部分を動くとき，点Pから単位円周上の3点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ までの距離の和 $\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$ を L とする．以下，L の最大値を求める．点Pの座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおき，L を θ の式で表すと，

$$L=\sqrt{(\cos\theta-\boxed{ア})^2+\sin^2\theta}+\sqrt{(\cos\theta+\boxed{イ})^2+\sin^2\theta}+\sqrt{\left(\cos\theta-\frac{1}{\boxed{ウ}}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}\right)^2}$$

ア: 1　イ: 1　ウ: 2　エ: 3　オ: 2

と表される．整理すると，たとえば，点Pが第2象限にあるとき，

$$L=\left(\boxed{カ}+\sqrt{\boxed{キ}}\right)\sin\frac{\theta}{\boxed{ク}}+\cos\frac{\theta}{\boxed{ケ}}$$

カ: 2　キ: 3　ク: 2　ケ: 2

となり，適当な実数 α を用いて

$$L=\sqrt{\boxed{コ}+\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}\sin\left(\frac{\theta}{\boxed{ス}}+\alpha\right)$$

コ: 8　サ: 4　シ: 3　ス: 2

と表すことができる．よって，L の最大値は，$\sqrt{\boxed{セ}}+\sqrt{\boxed{ソ}}$ である．ただし，$\boxed{セ}>\boxed{ソ}$ とする．

セ: 6　ソ: 2

$$L=\underbrace{\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}}_{\mathrm{PA}}+\underbrace{\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}}_{\mathrm{PB}}+\underbrace{\sqrt{\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}_{\mathrm{PC}}\ //$$

$L=\sqrt{2-2\cos\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}+\sqrt{2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}$　($\because \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を使った)

$=2\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}+2\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}+\sqrt{2-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$

$=2\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}}+2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}+2\sqrt{\sin^2\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}}$

点Pが第2象限にあることより，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$　よって，$\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{12}<\frac{\theta-\frac{\pi}{3}}{2}<\frac{\pi}{3}$

$\therefore L=2\sin\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{3\theta-\pi}{6}$

$=2\sin\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}+2\left(\sin\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=\underline{(2+\sqrt{3})\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}\ //$

$\therefore L=\underline{\sqrt{8+4\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\alpha\right)}\ //$　$\therefore$ 最大値は $\underbrace{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}_{\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}\text{ より}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\underline{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\ //$