



2014年第4問

4 平面上の直線 l に同じ側で接する2つの円 C_1, C_2 があり, C_1 と C_2 も互いに外接している. l, C_1, C_2 で囲まれた領域内に, これら3つと互いに接する円 C_3 を作る. 同様に l, C_n, C_{n+1} ($n = 1, 2, 3, \dots$) で囲まれた領域内にあり, これら3つと互いに接する円を C_{n+2} とする. 円 C_n の半径を r_n とし, $x_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $r_1 = 16, r_2 = 9$ とする.

- (1) l が C_1, C_2, C_3 と接する点を, それぞれ A_1, A_2, A_3 とおく. 線分 A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 の長さおよび r_3 の値を求めよ.
- (2) ある定数 a, b に対して $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となることを示せ. a, b の値も求めよ.
- (3) (2) で求めた a, b に対して, 2次方程式 $t^2 = at + b$ の解を α, β ($\alpha > \beta$) とする. $x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$ を満たす有理数 c, d の値を求めよ. ただし, $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい.
- (4) (3) の c, d, α, β に対して,

$$x_n = c\alpha^{n+1} + d\beta^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となることを示し, 数列 $\{r_n\}$ の一般項を α, β を用いて表せ.

