岩手大学

2014年 教育学部 第4問

数理 石井K

4 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-3a_n$ で定義するとき，一般項 b_n を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) $x \neq \frac{1}{3}$ のとき，$S_n=\sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1}$ を求めよ．

(1) $a_{n+2}-3a_{n+1}=a_{n+1}-3a_n$ より $b_{n+1}=b_n$

$\therefore$ $\{b_n\}$ は初項 $b_1=a_2-3a_1=0$，公比 1 の等比数列.

$\therefore$ $\underline{b_n=0}$ //

(2) (1)より $a_{n+1}=3a_n$

$\therefore$ $\{a_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列

$\therefore$ $\underline{a_n=3^{n-1}}$ //

(3) $S_n=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 3^{k-1}\cdot x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n} k\cdot(3x)^{k-1}$

$$\therefore\ S_n=1\cdot(3x)^0+2\cdot(3x)^1+3\cdot(3x)^2+\cdots+n\cdot(3x)^{n-1}$$

$$-)\ 3xS_n=\qquad 1\cdot(3x)^1+2\cdot(3x)^2+\cdots+(n-1)\cdot(3x)^{n-1}+n\cdot(3x)^n$$

$$\therefore\ (3x-1)S_n=n\cdot(3x)^n-\left\{(3x)^1+(3x)^2+\cdots+(3x)^{n-1}\right\}-1\cdot(3x)^0$$

$$=n\cdot(3x)^n-\frac{3x\left\{(3x)^{n-1}-1\right\}}{3x-1}-1$$

$x \neq \frac{1}{3}$ より

$$\underline{S_n=\frac{3^n\cdot n\cdot(3x-1)\cdot x^n-3^n\cdot x^n+1}{(3x-1)^2}}\ //$$