筑波大学

2014年 第4問

$\boxed{4}$ 平面上の直線 ℓ に同じ側で接する2つの円 C_1，C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している．ℓ，C_1，C_2 で囲まれた領域内に，これら3つと互いに接する円 C_3 を作る．同様に ℓ，C_n，C_{n+1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら3つと互いに接する円を C_{n+2} とする．円 C_n の半径を r_n とし，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$r_1=16$，$r_2=9$ とする．

(1) ℓ が C_1，C_2，C_3 と接する点を，それぞれ A_1，A_2，A_3 とおく．線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の長さおよび r_3 の値を求めよ．

(2) ある定数 a，b に対して $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示せ．a，b の値も求めよ．

(3) (2)で求めた a，b に対して，2次方程式 $t^2=at+b$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする．$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ を満たす有理数 c，d の値を求めよ．ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい．

(4) (3)の c，d，α，β に対して，

$$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を α，β を用いて表せ．