

2015年工学部第2問

2 初項1, 公差3の等差数列  $\{a_n\}$  と, 一般項が  $b_n = \left[ \frac{2n+2}{3} \right]$  で与えられる数列  $\{b_n\}$  がある. ここで, 実数  $x$  に対して  $[x]$  は  $x$  を超えない最大の整数を表す. たとえば,  $b_1 = \left[ \frac{4}{3} \right] = 1$ ,  $b_2 = [2] = 2$ ,  $b_3 = \left[ \frac{8}{3} \right] = 2$  である. 数列  $\{a_n\}$  を次のように,  $b_1$  個,  $b_2$  個,  $b_3$  個,  $\dots$  の群に分け, 第  $k$  群には  $b_k$  個の数が入るようにする.

$a_1$	$a_2, a_3$	$a_4, a_5$	$a_6, \dots$
第1群	第2群	第3群	...

第  $k$  群の最初の数を  $c_k$  とする. 次に答えよ.

- (1) 自然数  $m$  に対して,  $b_{3m-2}$ ,  $b_{3m-1}$ ,  $b_{3m}$  をそれぞれ  $m$  の多項式で表せ. また, 数列  $\{b_n\}$  の初項から第  $3m$  項までの和  $S_{3m}$  を求めよ.
- (2) 自然数  $m$  に対して,  $c_{3m-2}$ ,  $c_{3m-1}$ ,  $c_{3m}$  をそれぞれ  $m$  の多項式で表せ. また, 数列  $\{c_k\}$  の初項から第  $3m$  項までの和  $T_{3m}$  を求めよ.
- (3) 1000 は第何群の何番目の数か.
- (4)  $x \geq 1$  のとき  $\sqrt{x^2+1} < x + \frac{1}{2}$  であることを用いて, 次の不等式が成り立つことを示せ. ただし,  $m$  は自然数とする.

$$\sum_{k=1}^{3m} (\sqrt{c_k} - k) < \frac{m}{2}$$