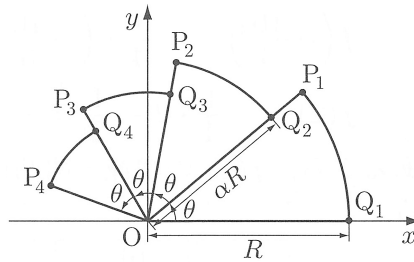


2017年工学部第1問

1 xy 平面上の座標 $(R, 0)$ の点を Q_1 とする. 各 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して以下の規則で点 Q_2, Q_3, \dots , 点 P_1, P_2, \dots を定める.

原点 O を中心に点 Q_n を反時計回りに角度 θ (ラジアン) 回転させた点を P_n とし, 線分 OP_n を $\alpha : (1 - \alpha)$ に内分する点を Q_{n+1} とする.

ただし, $R > 0, 0 < \alpha < 1$ とする. 扇形 OQ_nP_n の面積を S_n とし, 円周率は π とする. 以下の問いに答えよ.



- (1) S_1 を R, θ を用いて表せ.
- (2) S_n を R, θ, n, α を用いて表せ.
- (3) $W_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ とおく. W_n を R, θ, n, α を用いて表せ.
- (4) 数列 $\{W_n\}$ の極限值 $W = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ を R, θ, α を用いて表せ.
- (5) 弧 Q_nP_n の長さを a_n , 線分 P_nQ_{n+1} の長さを b_n とし, 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots + a_n + b_n + \dots$$

の和を T とする. $T = 2R$ かつ (4) で求めた W が $W = 2S_1$ となる α と θ を求めよ.