

2012年 医学部 第1問

1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} a_1 = 5, b_1 = 3, \\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

また, 自然数 n について $c_n = a_n^2 - b_n^2$ とおく. このとき以下の各問いに答えよ.

- (1) c_n を n を用いて表せ.
 (2) k を自然数とすると, 自然数 l について

$$a_{k+l} = a_k a_l + b_k b_l, \quad b_{k+l} = b_k a_l + a_k b_l$$

が成立することを, l に関する数学的帰納法によって示せ.

- (3) $n > l$ となる自然数 n, l について

$$b_{n+l} - c_l b_{n-l} = 2a_n b_l$$

が成立することを示せ.

- (4) 2 以上の自然数 n について

$$a_{2n} + \sum_{m=1}^{n-1} c_{n-m} a_{2m} = \frac{b_{2n+1}}{2b_1} - \frac{c_n}{2}$$

が成立することを示せ.