津田塾大学

2014年 学芸（数学） 第2問

数理 石井K

2 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が，すべての x に対して $f''(x) \leqq 0$ を満たすとする．このとき，

(*)　$x_1 < x_2 < x_3$ に対して $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

が成立することを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ が (*) を満たすとする．このとき，$a<b$ を満たす実数 a，b と $0<t<1$ を満たす t に対して，

$$f((1-t)a+tb) \geqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

が成立することを示せ．

(1) 平均値の定理より，

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1)$ となる $x_1<c_1<x_2$ が存在する．

$\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(c_2)$ となる $x_2<c_2<x_3$ が存在する

$f''(x) \leqq 0$ より，$f'(x)$：単調減少 また，$c_1<c_2$ より $f'(c_1) \geqq f'(c_2)$

$\therefore \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geqq \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ $(x_1<x_2<x_3)$ ▨

(2) (1) の (*) において，$x_1=a$，$x_2=(1-t)a+tb$，$x_3=b$ とおくと，

$x_1<x_2<x_3$ をみたしている．

このとき (*) 式は $\dfrac{f(x_2)-f(a)}{t(b-a)} \geqq \dfrac{f(b)-f(x_2)}{(1-t)(b-a)}$

$f(x_2)$ は代入するとはんざつになるので，x_2 のまま最後まで残すことにした

$\therefore$ $t>0$，$1-t>0$，$b-a>0$ より両辺に $t(1-t)(b-a)$ をかけて

$$(1-t)\{f(x_2)-f(a)\} \geqq t\{f(b)-f(x_2)\}$$

$$\therefore (1-t)f(x_2)+tf(x_2) \geqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

$$\therefore f((1-t)a+tb) \geqq (1-t)f(a)+tf(b)$$ ▨