2011年 学芸（数学） 第4問

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．

(1) t に関する関数 $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ $(t \geqq 0)$ のグラフをかけ．

(2) $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ $(t \geqq 0)$ のとき，$\sqrt{x^2-1}$ を t を用いて表せ．

(3) Oを原点とし，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上にある第1象限内の点とする．$a = \dfrac{e^s + e^{-s}}{2}$ $(s > 0)$ のとき，線分OPと双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を，s を用いて表せ．

(1) $x' = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = \dfrac{e^{2t}-1}{2e^t} = \dfrac{(e^t+1)(e^t-1)}{2e^t}$ ← tで微分した．$e^t+1>0$，$2e^t>0$ より

$x'=0$ となるのは，$e^t=1$ のとき．

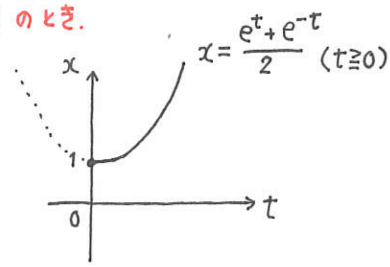
すなわち，$t=0$ のとき．

∴ $x'=0$ となるのは，$t=0$ のとき．

また，$x'' = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2} > 0$ より，グラフは下に凸

t	0	$\cdots$
x'	0	$+$
x	1	↗

∴ グラフは右のようになる．



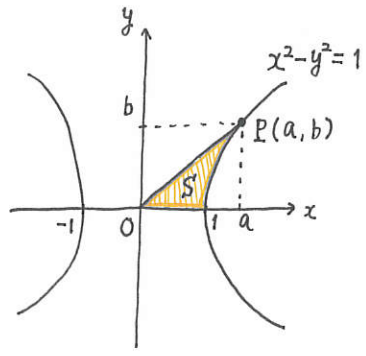
(2) $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 - 1}$

$= \sqrt{\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}$

$= \underline{\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}}$ // （∵ $t \geqq 0$ より $e^t \geqq e^{-t}$ なので）

(3) 右の図より．



$S = \dfrac{1}{2} \times a \times b - \displaystyle\int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx$

(2)より $x = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ とおいて

置換積分する

$= \dfrac{1}{2}ab - \displaystyle\int_0^s \dfrac{e^t-e^{-t}}{2} \cdot \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt$

x	$1 \to a$
t	$0 \to s$

，$dx = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}dt$

$= \dfrac{1}{2}ab - \displaystyle\int_0^s \dfrac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}\,dt$

$= \dfrac{1}{2}ab - \left[\dfrac{\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - 2t}{4}\right]_0^s$

$= \dfrac{1}{2}ab - \left(\dfrac{1}{8}e^{2s} - \dfrac{1}{8}e^{-2s} - \dfrac{s}{2}\right)$

$a = \dfrac{e^s+e^{-s}}{2}$ と $a^2-b^2=1$ より，$b = \dfrac{e^s-e^{-s}}{2}$

よって，$S = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{e^{2s}-e^{-2s}}{4} - \dfrac{1}{8}e^{2s} + \dfrac{1}{8}e^{-2s} + \dfrac{s}{2}$

$= \underline{\dfrac{s}{2}}$ //