

2015年第2問

2 関数 $f(t)$, $g(t)$ を次のように定義する。ただし, e は自然対数の底とする。

$$f(t) = (t-1)e^{-t}, \quad g(t) = (t-1)^2e^{-t}$$

xy 平面上の曲線 C が, 媒介変数 t を用いて

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad (1 \leq t \leq 3)$$

と表されるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $f(t) = g(t)$ となる t の値を α , β ($\alpha < \beta$) とする。 α , β の値を求めよ。さらに, $\alpha \leq t \leq \beta$ のとき, $f(t) \geq g(t)$ であることを示せ。
- (2) 導関数 $f'(t)$, $g'(t)$ をそれぞれ求めよ。さらに, 区間 $\alpha \leq t \leq \beta$ において, 関数 $f(t)$, $g(t)$ がともに単調に増加することを示せ。
- (3) 次の定積分をそれぞれ求めよ。

$$I_1 = \int_0^1 ue^{-2u} du, \quad I_2 = \int_0^1 u^2 e^{-2u} du, \quad I_3 = \int_0^1 u^3 e^{-2u} du$$

- (4) 曲線 C と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。