



2016年学芸(情報科学)第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sin \theta = 2^n \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n}$$

(2) $0 < \theta < \pi$ のとき、次の極限値を θ を用いて表せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n}$$

(1) 倍角の公式より

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{4} \sin \frac{\theta}{4} \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{4} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{8} \sin \frac{\theta}{8} \\ &\quad \vdots \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{4} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{8} \cdots \cdots 2 \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n} \\ &= 2^n \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cdots \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n} \quad \square \end{aligned}$$

$$(2) \text{ (与式) } = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \quad (\because (1) \text{ より})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta \cdot \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin \frac{\theta}{2^n}} \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\theta} \quad \text{〃}$$