筑波大学

2012 年 第 4 問

4 四面体 OABC において，次が満たされているとする．

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$$

点 A，B，C を通る平面を α とする．点 O を通り平面 α と直交する直線と，平面 α との交点を H とする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ．

(2) 点 H は △ABC の垂心であること，すなわち $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ を示せ．

(3) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$ とする．このとき，△ABC の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ．