琉球大学

2012年 理系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する．

$$c_1=1,\quad c_{n+1}=1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3}\left(c_n+\frac{1}{4^{n+1}}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n=1+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4^n}$ とする．このとき，$c_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}+\sum_{i=2}^{n}\dfrac{a_i}{3^{n-i}}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ．

(1) 与えられた漸化式 $c_{n+1}=1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3}\left(c_n+\frac{1}{4^{n+1}}\right)$ の両辺に 3^{n+1} をかけて

$$3^{n+1}\cdot c_{n+1}=3^n\cdot c_n+3^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$$\therefore\ 3^{n+1}c_{n+1}=3^n c_n+3^{n+1}\cdot a_{n+1}$$

数列 $\{b_n\}$ を $b_n=3^n c_n$ $(n=1,2,\cdots)$ で定めると，

$$b_{n+1}-b_n=3^{n+1}a_{n+1}$$

$$\therefore\ b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k+1}a_{k+1}\quad(n=2,3,\cdots)$$

Σ の添え字を1つずらした

$$\therefore\ 3^n c_n=3\cdot c_1+\sum_{k=2}^{n}3^k a_k$$

$$\therefore\ c_n=\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{3^{n-k}}\quad(n=2,3,4\cdots)\ \blacksquare$$

(2)
$$c_n=\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\sum_{k=2}^{n}3^k\left(1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^k}\right)$$

$$=\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\left\{\sum_{k=2}^{n}3^k+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k+\frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\left(\frac{9(1-3^{n-1})}{1-3}-3+\frac{\frac{9}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{9}{16}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}\left\{\frac{3}{2}\cdot3^n+3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^n-13\right\}$$

$$=\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^n}-\frac{1}{4^n}-\frac{13}{3^n}$$

$$\therefore\ \underline{\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{3}{2}}\ //$$