

2014年医学部第1問

1  $p$  を正の実数として、放物線  $C: y^2 = 4px$  を定める。  $C$  の頂点を  $O$ 、焦点を  $F$ 、準線を  $l: x = -p$  とする。  $C$  上の2点  $A(a, 2\sqrt{pa})$  ( $a > 0$ ) と  $B(b, -2\sqrt{pb})$  ( $b > 0$ ) を考えるとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $A$  における  $C$  の接線を  $\ell(A)$  とし、  $\ell(A)$  と準線  $l$  との交点を  $P$  とする。  $\ell(A)$  の方程式をかいて、  $P$  の座標を求めよ。また、線分  $AP$  の長さは線分  $AF$  の長さより大きいことを示せ。

(2) 接線  $\ell(A)$  が直線  $AB$  と  $A$  において直交するとき、  $b$  を  $a, p$  を用いて表せ。また  $a$  が  $0 < a < \infty$  の範囲内を動くとき、  $b$  の最小値を求めよ。

以下 (2) の最小値を実現する  $C$  上の2点を  $A_0, B_0$  とし、接線  $\ell(A_0)$  と準線  $l$  の交点を  $P_0$  とする。

(3) 直線  $OA_0$  と直線  $P_0B_0$  は  $O$  において直交することを示せ。

(4)  $\triangle A_0OB_0$  の面積を  $S$ 、線分  $A_0B_0$  と  $C$  で囲まれた図形の面積を  $T$  とするとき、比  $S:T$  を求めよ。