

増田

2012年 第2問

2 次の問に答えなさい。

(1) 2つの関数

$$y = |x| - 1 \quad \dots\dots ①$$

$$y = -|x| + 1 \quad \dots\dots ②$$

がある。関数①のグラフを C_1 、②のグラフを C_2 とする。このとき、 C_1 と C_2 は2点 $(-12, 1)$ 、 $(13, 0)$ 、 $(14, 15)$ で交わる。 C_1 は y 軸と点 $(0, 16)$ で交わり、 C_2 は y 軸と点 $(0, 17)$ で交わる。

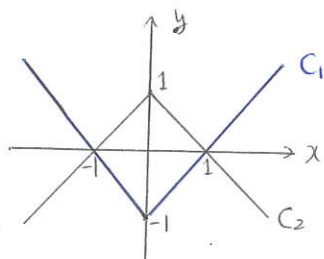
(2) 2つの関数

$$y = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} |x| - (\sqrt{5} + \sqrt{3})$$

$$y = -\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} |x| + (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

のグラフを、それぞれ、 C_1 、 C_2 とする。このとき、 C_1 と C_2 は2点 $(-18, 19)$ 、 $(20, 21)$ で交わる。また、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積は $\frac{22}{23}$ である。

(1)



左図より、 C_1 と C_2 は2点 $(-1, 0)$ 、 $(1, 0)$ で交わる。

C_1 は y 軸と点 $(0, -1)$ で交わり、

C_2 は y 軸と点 $(0, 1)$ で交わる。

(2) $x > 0$ のとき、 $|x| = x$

$x > 0$ のときの交点を求める。

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} x - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} x + (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

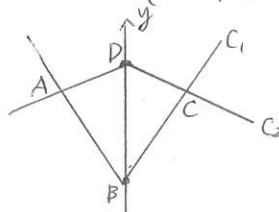
$$\left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \right) x = (\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{2} x = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{16}{2} x = 2\sqrt{5} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ のとき、} \quad y &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \\ &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} - (\sqrt{5} + \sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$|x|$ は $y=0$ に関して対称なので、 C_1 と C_2 は2点 $(-\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ 、 $(\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ で交わる。



また、 C_1 は y 軸と $(0, -\sqrt{5} - \sqrt{3})$ で、 C_2 は y 軸と $(0, \sqrt{5} - \sqrt{3})$ で交わる。

求める部分の面積を四角形 $ABCD$ とする

$$\begin{aligned} \text{と、(四角形 } ABCD \text{ の面積)} \\ &= 2 \times (\triangle CBD \text{ の面積)} \\ &= 2 \times (BD \text{ の長さ}) \times (C \text{ の } x \text{ 座標)} \times \frac{1}{2} \\ &= 2 \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$