島根大学

2014年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 3つの箱 X，Y，Z と3つの玉 a，b，c があり，1つの箱には1つの玉が入るとする．箱 X には a が，箱 Y には b が，箱 Z には c が入っている状態から始めて，次の操作を繰り返し行う．

「数字1，2，3，4，5の中から無作為に1つの数字 m を選ぶ．$m=1$ ならば，箱 Y，Z にある玉をそれぞれ箱 Z，Y に移す．$m=2$ ならば，箱 X，Z にある玉をそれぞれ箱 Z，X に移す．$m=3$ ならば，箱 X，Y にある玉をそれぞれ箱 Y，X に移す．$m=4$ ならば，箱 X，Y，Z にある玉をそれぞれ箱 Y，Z，X に移す．$m=5$ ならば，箱 X，Y，Z にある玉をそれぞれ箱 Z，X，Y に移す．」

この操作を n 回繰り返したあとに3つの玉が最初の状態に戻っている確率を p_n とする．箱 X，Y，Z にそれぞれ玉 x，y，z が入っている状態を $(x,\ y,\ z)$ と表す．たとえば，最初の状態は $(a,\ b,\ c)$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1回目の操作を行ったあとの起こりうる状態をすべて挙げ，p_1，p_2 を求めよ．

(2) n 回目の操作を行ったあとの状態が最初の状態 $(a,\ b,\ c)$ となっていない確率を q_n とする．$n \geqq 1$ のとき，$p_{n+1} = \dfrac{1}{5}q_n$ が成り立つことを示せ．

(3) p_n を求めよ．