

2012年 情報工学部 第3問

3 Oを原点とする座標平面上に点 $P_0(1, 1)$ ,  $Q_0(1, 0)$ がある. ある $p(0 < p < 1)$ に対して, 点 $P_1(p, p)$ ,  $Q_1(p, 0)$ を定め, さらに, 自然数 $n$ について点 $P_{n+1}$ ,  $Q_{n+1}$ を次のように定める.

- 点 $Q_n$ を通り直線 $Q_0P_1$ と平行な直線と, 直線 $OP_0$ の交点を $P_{n+1}$ とする.
- 点 $P_{n+1}$ を通り $y$ 軸と平行な直線と,  $x$ 軸の交点を $Q_{n+1}$ とする.

また,  $\triangle Q_{n-1}P_nQ_n$ の面積を $S_n$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1)  $S_1$ を $p$ を用いて表せ.
- (2) 点 $Q_{n-1}$ の $x$ 座標を $q$ とするとき, 点 $Q_n$ の $x$ 座標を $p, q$ を用いて表せ.
- (3)  $S_n$ を $p, n$ を用いて表せ.
- (4)  $n$ を定数として,  $p$ を $0 < p < 1$ の範囲で動かすとき,  $S_n$ を最大にする $p$ とそのときの $S_n$ をそれぞれ $n$ を用いて表せ.
- (5) (4)で求めた $S_n$ に対して,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ. 必要であれば, 自然対数の底 $e$ について $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ が成り立つことを用いてよい.

