



2017年 第5問

5  $xy$  平面において、 $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点という。また、実数  $a$  に対して、 $a$  以下の最大の整数を  $[a]$  で表す。記号  $[ ]$  をガウス記号という。以下の問いでは  $N$  を自然数とする。

- (1)  $n$  を  $0 \leq n \leq N$  を満たす整数とする。点  $(n, 0)$  と点  $(n, N \sin(\frac{\pi n}{2N}))$  を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。
- (2) 直線  $y = x$  と、 $x$  軸、および直線  $x = N$  で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を  $A(N)$  とおく。このとき  $A(N)$  を求めよ。
- (3) 曲線  $y = N \sin(\frac{\pi x}{2N})$  ( $0 \leq x \leq N$ ) と、 $x$  軸、および直線  $x = N$  で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を  $B(N)$  とおく。(2) の  $A(N)$  に対して  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)}$  を求めよ。