



2017年第6問

6 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とする. 複素数平面上において, 原点を中心とする半径1の円の上に異なる5点 $P_1(w_1)$, $P_2(w_2)$, $P_3(w_3)$, $P_4(w_4)$, $P_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり, 次の2つの条件 (i), (ii) を満たすとする.

(i) $(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$ が成り立つ.

(ii) $\frac{w_3}{w_2}$ と $-\frac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ の解である.

また, 五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積を S とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle P_5P_1P_2$ を求めよ.

(2) S を a を用いて表せ.

(3) $R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$ とする. このとき, $R^2 + 2S$ は a の値によらないことを示せ.