

2012年 工学科学 第2問

2  $xyz$  空間内に四面体  $PABC$  がある.  $\triangle ABC$  は  $xy$  平面内にある鋭角三角形とし, 頂点  $P$  の  $z$  座標は正とする.  $P$  から  $xy$  平面に下ろした垂線を  $PH$  とし,  $H$  は  $\triangle ABC$  の内部にあるとする.  $H$  から直線  $AB, BC, CA$  に下ろした垂線をそれぞれ  $HK_1, HK_2, HK_3$  とする. そのとき  $PK_1 \perp AB, PK_2 \perp BC, PK_3 \perp CA$  である.  $\angle PK_1H = \alpha_1, \angle PK_2H = \alpha_2, \angle PK_3H = \alpha_3$  とし,  $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$  の面積をそれぞれ  $S_1, S_2, S_3$  とする.

(1)  $\triangle HAB$  の面積を  $\alpha_1, S_1$  を用いて表せ.

(2) 3つのベクトル  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  は, 大きさがそれぞれ  $S_1, S_2, S_3$  であり, 向きがそれぞれ平面  $PAB$ , 平面  $PBC$ , 平面  $PCA$  に垂直であるとする. ただし,  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  の  $z$  成分はすべて正とする. このとき,  $\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3$  の  $z$  成分は  $\triangle ABC$  の面積に等しいことを示せ.

(3) 3辺  $AB, BC, CA$  の長さの比  $AB : BC : CA$  を,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, S_1, S_2, S_3$  を用いて表せ.