



2015年第3問

3 p と q は正の整数とする. 2次方程式 $x^2 - 2px - q = 0$ の2つの実数解を α, β とする. ただし $\alpha > \beta$ とする. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{2}(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. ただし $\alpha^0 = 1, \beta^0 = 1$ と定める.

- (1) すべての自然数 n に対して, $a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n$ であることを示せ.
- (2) すべての自然数 n に対して, a_n は整数であることを示せ.
- (3) 自然数 n に対し, $\frac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする. p と q が $q < 2p + 1$ を満たすとき, b_n を a_n を用いて表せ.