



2018年第3問

3 正三角形 OAB に対し、直線 OA 上の点 P_1, P_2, P_3, \dots および直線 OB 上の点 Q_1, Q_2, Q_3, \dots を、次の (i), (ii), (iii) を満たすようにとる。

(i) $P_1 = A$ である。

(ii) 線分 $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots$ はすべて直線 OA に垂直である。

(iii) 線分 $Q_1P_2, Q_2P_3, Q_3P_4, \dots$ はすべて直線 OB に垂直である。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが、整数 k, l によって $k\vec{a} + l\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする。 n を自然数とすると、以下の問いに答えよ。

(1) \vec{OP}_n と \vec{OQ}_n を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。

(2) $\vec{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 Q_nP_{n+1} 上にあるとき、 x を y を用いて表せ。また、線分 Q_nP_{n+1} 上にある S の点の個数を求めよ。

(3) 三角形 $OP_{n+1}Q_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ。