



2018年第5問

5 $f(x) = \int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$ とし, $c \geq \pi$ とする. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める.

- (1) $f(\pi)$ を求めよ. また, $x \geq \pi$ のとき, $0 < f'(x) \leq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ.
- (2) すべての自然数 n に対して, $a_n \geq \pi$ が成り立つことを示せ.
- (3) すべての自然数 n に対して, $|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi} |a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ. また, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.