



2018年第3問

3 正三角形  $OAB$  に対し、直線  $OA$  上の点  $P_1, P_2, P_3, \dots$  および直線  $OB$  上の点  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  を、次の (i), (ii), (iii) を満たすようにとる。

(i)  $P_1 = A$  である。

(ii) 線分  $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots$  はすべて直線  $OA$  に垂直である。

(iii) 線分  $Q_1P_2, Q_2P_3, Q_3P_4, \dots$  はすべて直線  $OB$  に垂直である。

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$  とおく。点  $O$  を基準とする位置ベクトルが、整数  $k, l$  によって  $k\vec{a} + l\vec{b}$  と表される点全体の集合を  $S$  とする。 $n$  を自然数とすると、以下の問いに答えよ。

(1)  $\vec{OP}_n$  と  $\vec{OQ}_n$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ。

(2)  $\vec{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$  で定まる点  $R$  が線分  $Q_nP_{n+1}$  上にあるとき、 $x$  を  $y$  を用いて表せ。また、線分  $Q_nP_{n+1}$  上にある  $S$  の点の個数を求めよ。

(3) 三角形  $OP_{n+1}Q_n$  の周または内部にある  $S$  の点の個数を求めよ。