



2018年第5問

5  $f(x) = \int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$  とし,  $c \geq \pi$  とする. 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = c$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) で定める.

- (1)  $f(\pi)$  を求めよ. また,  $x \geq \pi$  のとき,  $0 < f'(x) \leq \frac{2}{\pi}$  が成り立つことを示せ.
- (2) すべての自然数  $n$  に対して,  $a_n \geq \pi$  が成り立つことを示せ.
- (3) すべての自然数  $n$  に対して,  $|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi} |a_n - \pi|$  が成り立つことを示せ. また,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.