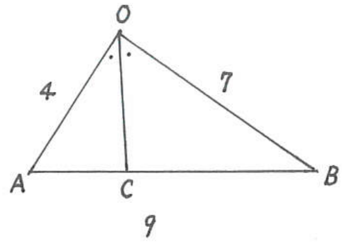
2016年 教育学部 第2問

数理 石井K

2 平面上に OA = 4, AB = 9, OB = 7 となるような △OAB があり，∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を C とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の値を求めよ．
(2) $\overrightarrow{OC}$ と $k\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ が平行になるような実数 k を求めよ．
(3) (2)の結果を用いて，$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．
(4) $|\overrightarrow{OC}|$ の値を求めよ．



(1) ∠AOB = θ とおくと，余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{4^2+7^2-9^2}{2\cdot4\cdot7} = -\frac{2}{7}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta = 4\cdot7\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) = \underline{-8}$$

(2) 直線 OC は ∠AOB の二等分線より，

$$AC:CB = OA:OB = 4:7$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OC} = \frac{7}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{11}\overrightarrow{OB} = \frac{4}{11}\left(\frac{7}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

$$\therefore\ \underline{k=\frac{7}{4}}$$

(注) 誘導を無視したために
(3) から答えが出たが気にしなくてよい．

(3) (2) で既に求めた

$$\underline{\overrightarrow{OC} = \frac{7}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{11}\overrightarrow{OB}}$$

(4) (3) より

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \frac{49}{121}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{56}{121}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{16}{121}|\overrightarrow{OB}|^2$$

$$= \frac{49\times16}{121}-\frac{56\times8}{121}+\frac{16\times49}{121}$$

$$= \frac{16\times7}{121}\cdot(7-4+7)$$

$$= \frac{16\times7\times10}{121}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{OC}| = \underline{\frac{4}{11}\sqrt{70}}$$