0002284815177999

宇都宮大学

2015年 教育学部 第4問

1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ u を任意の実数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の点 $\mathrm{P}(u,\ u-1)$ を通り，曲線 $y=x^2$ に接する直線は，ちょうど2本あることを示せ．

(2) (1)における2直線と曲線 $y=x^2$ の接点を，それぞれ $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ とするとき，α と β をそれぞれ u の式で表せ．ただし，$\alpha<\beta$ とする．

(3) (1)における2直線と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を S とするとき，S を u の式で表せ．

(4) (3)で求めた面積 S の最小値を求めよ．

(1) 接点を (t, t^2) とすると，$y'=2x$ より接線は

$$y=2t(x-t)+t^2$$

$$\therefore\ y=2tx-t^2$$

これが点Pを通ることから

$$u-1=2tu-t^2$$

$$\therefore\ t^2-2ut+u-1=0 \quad \cdots (*)$$

このtの方程式の判別式をDとすると，

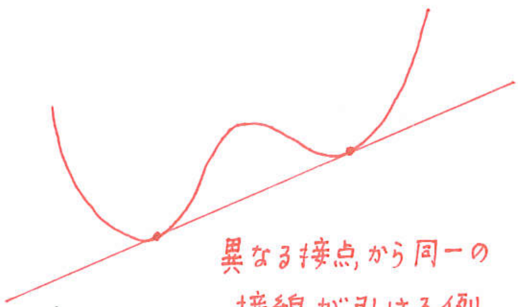
$$\frac{D}{4}=u^2-(u-1)$$

$$=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$>0$$

よって，(*)は異なる2つの実数解をもつ

すなわち，接点は2つあり，接線は2本ある ▨



(注) 3次以下の関数のグラフについては

(接点の個数) = (接線の本数)

となる

4次以上では，一般に成り立たない

理由は上の図のようなことがあるため

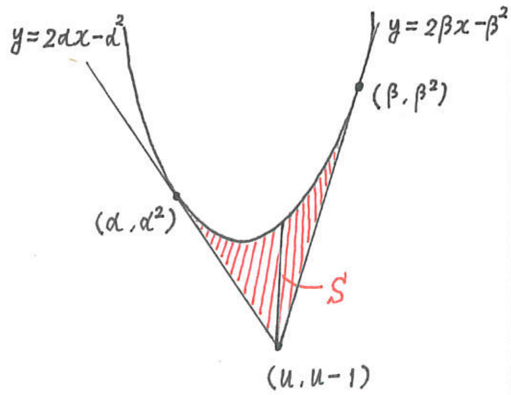
(2) (1)の(*)の解が α, β であるから，

$$t=\frac{2u\pm\sqrt{4u^2-4(u-1)}}{2}$$

$$=u\pm\sqrt{u^2-u+1}$$

$\alpha<\beta$ より，$\underline{\alpha=u-\sqrt{u^2-u+1}\ ,\ \beta=u+\sqrt{u^2-u+1}}$ //

(3) 右図より，



$$S=\int_\alpha^u x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\,dx+\int_u^\beta x^2-(2\beta x-\beta^2)\,dx$$

$$=\int_\alpha^u (x-\alpha)^2\,dx+\int_u^\beta (x-\beta)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^u+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_u^\beta$$

2枚目へつづく

2015年 教育学部 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ uを任意の実数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の点$\mathrm{P}(u,\ u-1)$を通り，曲線$y=x^2$に接する直線は，ちょうど2本あることを示せ．

(2) (1)における2直線と曲線$y=x^2$の接点を，それぞれ$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$とするとき，$\alpha$と$\beta$をそれぞれ$u$の式で表せ．ただし，$\alpha<\beta$とする．

(3) (1)における2直線と曲線$y=x^2$で囲まれた図形の面積をSとするとき，Sをuの式で表せ．

(4) (3)で求めた面積Sの最小値を求めよ．

(3)のつづき

$$S=\frac{1}{3}(u-\alpha)^3-\frac{1}{3}(u-\beta)^3$$

$$=\frac{1}{3}(u-u+\sqrt{u^2-u+1})^3-\frac{1}{3}(u-u-\sqrt{u^2-u+1})^3$$

$$=\underline{\frac{2}{3}(u^2-u+1)^{\frac{3}{2}}}\ //$$

(4) $S=\dfrac{2}{3}\left\{\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right\}^{\frac{3}{2}}$

∴ $\underline{S\text{の最小値は，}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ \left(u=\dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)}$ //