

2014年 理工学部 第5問

5 以下の  ,  ,  には三角関数は  $\sin\theta$  と  $\cos\theta$  のみを用いて記入し,  には  $x$  の式,  には  $y$  の式を記入すること.

座標平面上の2点  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  を結ぶ曲線  $C$  が媒介変数  $\theta$  を用いて

$$\begin{cases} x = f(\theta) \\ y = g(\theta) \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されているとする. いま, 関数  $f(\theta)$ ,  $g(\theta)$  は  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  で連続,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  で微分可能かつ  $f'(\theta) \neq 0$  であるとする. また  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき, 点  $(f(\theta), g(\theta))$  における曲線  $C$  の接線の傾きが  $-\tan\theta$  であり, この接線から  $x$  軸,  $y$  軸で切り取られる線分の長さがつねに一定で1であるとする.

まず, この曲線  $C$  の方程式を求めたい.  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき, 曲線  $C$  上の点  $(f(\theta), g(\theta))$  における接線を  $y = -(\tan\theta)x + h(\theta)$  と表すと  $h(\theta) =$   となる. この接線の傾きが  $\frac{g'(\theta)}{f'(\theta)}$  となることより,  $f(\theta) =$  ,  $g(\theta) =$   となる. したがって, 曲線  $C$  を  $x$ ,  $y$  の方程式で表すと

$$\text{ヌ} + \text{ネ} = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

となる.

次に, 点  $(f(\theta), g(\theta))$  における曲線  $C$  の法線を  $\ell(\theta)$  とする.  $\theta \neq \frac{\pi}{4}$  のとき  $\ell(\theta)$  と  $\ell\left(\frac{\pi}{4}\right)$  との交点の  $x$  座標を  $X(\theta)$  とすると,  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} X(\theta) =$   となる.

また, 曲線  $C$  と  $x$  軸,  $y$  軸で囲まれた部分の面積は  である.