



2014年理系第1問

1 a, b を実数, $a > 0$ として, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$ の定める1次変換を f とする. f によって, 点 $P(1, 0)$ が点 P_1 に移され, 点 P_1 が点 P_2 に移されるものとする. P が線分 P_1P_2 の中点であるとき, 次の問いに答えよ.

(1) a, b を求めよ.

(2) ある実数 c に対して $c\vec{OP} + \vec{OP}_1 = (v_1, v_2)$ とすると,

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. c を求めよ.

(3) $\vec{PP}_1 = (w_1, w_2)$ とする. すべての自然数 n に対して

$$A^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを, 数学的帰納法によって証明せよ.

(4) (2) と (3) の v_1, v_2, w_1, w_2 に対して, $\vec{OP} = s(v_1, v_2) + t(w_1, w_2)$ となる実数 s, t を求め, $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を n を用いて表せ. ただし, n は自然数である.