

2012年 医学部 第2問

2 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

$xy$  平面上で点  $P$  は  $x$  軸上に、点  $Q$  は  $y$  軸上に置かれ、点  $P$  の  $x$  座標と点  $Q$  の  $y$  座標はそれぞれ  $-2$  以上  $2$  以下の整数であるとする。点  $P$ 、 $Q$  に対して次の操作を考える。

**操作**

点  $P$  の座標が  $(i, 0)$ 、点  $Q$  の座標が  $(0, j)$  であるとき次の規則に従って 2 点  $P$ 、 $Q$  を互いに独立に同時に処理する。

- (P1)  $-1 \leq i \leq 1$  ならば点  $P$  を  $(i+1, 0)$  または  $(i-1, 0)$  のどちらかに確率  $\frac{1}{2}$  ずつで移す。  
 (P2)  $i = -2$  ならば点  $P$  を必ず  $(-1, 0)$  に移す。  
 (P3)  $i = 2$  ならば点  $P$  をそのままにしておく。  
 (Q1)  $-1 \leq j \leq 1$  ならば点  $Q$  を  $(0, j+1)$  または  $(0, j-1)$  のどちらかに確率  $\frac{1}{2}$  ずつで移す。  
 (Q2)  $j = -2$  ならば点  $Q$  を必ず  $(0, -1)$  に移す。  
 (Q3)  $j = 2$  ならば点  $Q$  をそのままにしておく。

さて、2 点  $P$ 、 $Q$  がともに  $(0, 0)$  に置かれている状態から始め、上の操作を 3 回繰り返し行う。

- (1) 3 回の操作の後、点  $P$  が  $(1, 0)$  に置かれている確率は  であり、 $(-1, 0)$  に置かれている確率は  である。
- (2)  $xy$  平面上で不等式  $y > x$  の表す領域を  $A$ 、不等式  $y > -x$  の表す領域を  $B$  とする。各回の操作後に点  $P$  が常に  $A \cup B$  内に置かれているという事象を  $U$  とし、各回の操作後に点  $Q$  が常に  $A \cup B$  内に置かれているという事象を  $V$  とすると、事象  $U \cup V$  の確率は  である。
- $xy$  平面上で 2 点  $P$ 、 $Q$  を結ぶ線分の長さを  $PQ$  とする。ただし 2 点  $P$ 、 $Q$  がともに  $(0, 0)$  に置かれている場合は  $PQ = 0$  とする。
- (3) 3 回の操作を通じてちょうど 1 回だけ  $PQ = \sqrt{2}$  となる確率は  である。
- (4) 3 回の操作を通じた  $PQ$  の最大値の期待値は  である。