琉球大学

2013年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ a を自然数とする．赤球3個，白球 a 個が入った袋から一つずつ順に取り出す操作をすべての球を取り出すまで繰り返す．ただし，取り出した球は元に戻さない．このとき，2個目の赤球が出る前までに取り出した球の数を X とする．次の問いに答えよ．

(1) $a=4$ とする．3番目までに赤球が1個だけ出て，4番目が赤球である確率を求めよ．

(2) $X=n$ となる確率を p_n とする．p_n が最大となる n の値を a を用いて表せ．

(3) X の期待値を求めよ．

(1) $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot{}_3C_1\cdot\frac{2}{4}=\underline{\frac{9}{35}}$ //

(2) $1\leqq n\leqq a+1$ のとき．（それ以外のときは $p_n=0$）

$$p_n=\frac{a}{a+3}\times\frac{a-1}{a+2}\times\cdots\times\frac{a-(n-2)}{a+3-(n-2)}\times\frac{3}{a+3-(n-1)}\times{}_nC_1\times\frac{2}{a+3-n}$$

$$=\frac{6n\,a(a-1)(a-2)\times\cdots\times(a-n+2)}{(a+3)(a+2)(a+1)\cdots(a-n+3)}$$

$$=\frac{6n(a-n+2)}{(a+3)(a+2)(a+1)}$$ ← n についての2次関数とみる．

（別解 $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ の値を調べてもよい）

$$=\frac{6}{(a+3)(a+2)(a+1)}\cdot\left\{-\left(n-\frac{a+2}{2}\right)^2+\frac{(a+2)^2}{4}\right\}$$

よって，p_n が最大となるのは，
$$\begin{cases} a\text{が偶数のとき．}\ n=\frac{a}{2}+1 \\ a\text{が奇数のとき．}\ n=\frac{a+1}{2},\ \frac{a+3}{2} \end{cases}$$ //

(3) $$(\text{期待値})=\sum_{k=1}^{a+1}k\cdot p_k$$

$$=\frac{6}{(a+3)(a+2)(a+1)}\sum_{k=1}^{a+1}k^2(a-k+2)$$

$$=\frac{6}{(a+3)(a+2)(a+1)}\left\{-\left(\frac{1}{2}(a+1)(a+2)\right)^2+(a+2)\cdot\frac{1}{6}(a+1)(a+2)(2a+3)\right\}$$

$$=\frac{6(a+2)}{a+3}\left\{-\frac{1}{4}(a+1)+\frac{1}{6}(2a+3)\right\}$$

$$=\underline{\frac{a+2}{2}}$$ //