



2015年理系第2問

2 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし、 $p_n, q_n$ は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を満たす実数とする。 $C_n$ と $x$ 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを $l_n$ とする。また、 $C_n$ と $x$ 軸で囲まれた部分の面積 $S_n$ は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left( \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \right)^3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $C_n$ の頂点の $y$ 座標を $l_n$ を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3)  $p_n = n\sqrt{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( -\frac{2q_n}{n^2} \right)$ を求めよ。ただし、 $\log x$ は $x$ の自然対数である。