大阪教育大学

2014年 第1問

1 α，β は正の実数とする．次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，以下の問に答えよ．

$$a_1 = \alpha, \quad b_1 = \beta,$$
$$a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n, \quad b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 \leqq 1$ が成り立つならば，任意の自然数 n に対して ${a_n}^2 + {b_n}^2 \leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(2) $\alpha = \cos\theta$，$\beta = \sin\theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と表されているとき，a_2，b_2，a_3，b_3 を θ を用いて表せ．

(3) $a_{12} = 1$，$b_{12} = 0$ となるような正の実数の組 $(\alpha,\ \beta)$ を全て求めよ．