2015 年 第 5 問　　1 枚目／2 枚

数理 石井K

5 微分可能な関数 $f(x)$ は，2 つの条件 $f'(x) = xe^x$，$f(1) = 0$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) すべての x に対して次の等式を満たす関数 $g(x)$ を求めよ．

$$g(x) = f(x) + \frac{(2-x)e^x}{e-1}\int_0^1 g(t)\,dt$$

(3) $g(x)$ を (2) で求めた関数とし，k を定数とする．x についての方程式 $g(x) = kx$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \infty$ を用いてよい．

(1) $f(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int x(e^x)'\,dx$

$= xe^x - \int e^x\,dx$

$= (x-1)e^x + C$ （C は積分定数）

$f(1) = 0$ より．$C = 0$

$\therefore \underline{f(x) = (x-1)e^x}$ //

(2) $\int_0^1 g(t)\,dt = a$（定数）とおくと (1) より $g(x) = (x-1)e^x + \frac{(2-x)e^x}{e-1}\cdot a$

と表せるので

$a = \int_0^1 \left\{t-1+\frac{(2-t)a}{e-1}\right\}\cdot(e^t)'\,dt$

$= \left[\left\{t-1+\frac{(2-t)a}{e-1}\right\}e^t\right]_0^1 - \int_0^1\left(1+\frac{-a}{e-1}\right)e^t\,dt$

$= \frac{a}{e-1}e - \left(-1+\frac{2a}{e-1}\right) - \left(1-\frac{a}{e-1}\right)\cdot(e-1)$

$= \frac{e-2}{e-1}a - (e-2) + a$

$\therefore (e-2)\cdot\left(\frac{a}{e-1} - 1\right) = 0$

$\therefore e-2 \neq 0$ より．$\frac{a}{e-1} - 1 = 0$　　$\therefore a = e-1$

元の式に代入して　$g(x) = (x-1)e^x + (2-x)e^x = \underline{e^x}$ //

2015年 第5問　　2枚目 / 2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ 微分可能な関数 $f(x)$ は，2つの条件 $f'(x) = xe^x$，$f(1) = 0$ を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) すべての x に対して次の等式を満たす関数 $g(x)$ を求めよ．

$$g(x) = f(x) + \frac{(2-x)e^x}{e-1}\int_0^1 g(t)\,dt$$

(3) $g(x)$ を (2) で求めた関数とし，k を定数とする．x についての方程式 $g(x) = kx$ の異なる実数解の個数を調べよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \infty$ を用いてよい．

(3) $g(x) = e^x$ より $g(0) = 1$

∴ $x = 0$ は $g(x) = kx$ の解ではないから $x \neq 0$ として両辺を x で割る

$\dfrac{e^x}{x} = k$ の実数解の個数を調べればよい.

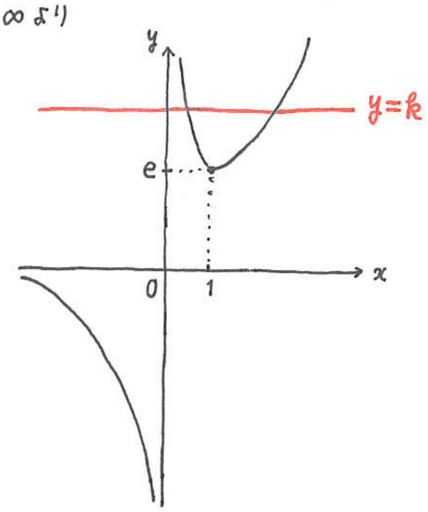
$h(x) = \dfrac{e^x}{x}$ とおくと

$h'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$h'(x)$		$-$	/	$-$	0	$+$	
$h(x)$	(0)	↘	/	↘	e	↗	(∞)

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-0} h(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+0} h(x) = \infty$ より

増減表は右のようになる



∴ 実数解の個数は

$$\begin{cases} 2\text{個} & (k > e \text{ のとき}) \\ 1\text{個} & (k < 0,\ k = e \text{ のとき}) \\ 0\text{個} & (0 \leqq k < e \text{ のとき}) \end{cases}$$ ——//