

2010年理系第3問

3 正の実数  $r$  と  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲の実数  $\theta$  に対して

$$a_0 = r \cos \theta, \quad b_0 = r$$

とおく.  $a_n, b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$  を  $\theta$  で表せ.
- (2)  $\frac{a_n}{b_n}$  を  $n$  と  $\theta$  で表せ.
- (3)  $\theta \neq 0$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{r \sin \theta}{\theta}$$

を示せ.