宇都宮大学

2014年第5問

5 $\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$として，関数$f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を

$$f_1(x) = a_1 \sin \alpha x + b_1 \cos \alpha x$$

$$f_{n+1}(x) = \beta(f_n(x) + f_n{}'(x))$$

と定める．ただし，a_1，b_1，α，βは実数である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_n(x)$は$f_n(x) = a_n \sin \alpha x + b_n \cos \alpha x$（$a_n$，$b_n$は実数）の形で表されることを示せ．

(2) (1)におけるa_n，b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$について，行列Pを用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と表すとき，行列Pを求めよ．

(3) $a_1 = 0$，$b_1 = 2$，$\alpha = \sqrt{3}$，$\beta = \dfrac{1}{2}$とするとき，$f_{99}(x)$を求めよ．

(1) 数学的帰納法で示す

(i) $n=1$のとき．$f_1(x) = a_1 \sin \alpha x + b_1 \cos \alpha x$ より成り立つ

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると，$f_k(x) = a_k \sin \alpha x + b_k \cos \alpha x$ となる

実数a_k，b_kが存在する．このとき．

$f_{k+1}(x) = \beta(f_k(x) + f_k'(x))$ より．
$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \beta \cdot a_k \sin \alpha x + \beta \cdot b_k \cos \alpha x \\ &\quad + \beta \cdot \alpha \cdot a_k \cos \alpha x - \beta \cdot \alpha \cdot b_k \cdot \sin \alpha x \\ &= \beta(a_k - \alpha b_k)\sin \alpha x + \beta(b_k + \alpha a_k)\cos \alpha x \end{aligned}$$

$\therefore$ $a_{k+1} = \beta(a_k - \alpha b_k)$，$b_{k+1} = \beta(b_k + \alpha a_k)$ とおくと．$n=k+1$のときも成り立つ

(i)，(ii)より．$n=1, 2, \cdots$ に対して成り立つ ▨

(2) (1)より．
$$P = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta \end{pmatrix}$$
//

(3) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$ より．$P^{98} = P^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a_{99} \\ b_{99} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore f_{99}(x) = -\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x - \cos\sqrt{3}x$ //