宇都宮大学

2015年 第6問

6 $m \geqq 1$ を整数とする．関数 $f(x)=(\pi-x)\sin mx\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=0$ となるすべての $x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の値を，小さい順に $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N$ で表す．このとき，N を m の式で表し，$x_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ を k と m の式で表せ．

(2) (1)で定めた x_k と $x_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$ に対し，曲線 $y=f(x)\ (x_k \leqq x \leqq x_{k+1})$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S_k とするとき，S_k を k と m の式で表せ．

(3) (2)で求めた面積 S_k の $k=1$ から $N-1$ までの和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} S_k$ を求めよ．

(1) $f(x)=0$ となるのは，$x=0,\ \frac{\pi}{m},\ \frac{2\pi}{m},\ \frac{3\pi}{m},\ \cdots,\ \frac{m\pi}{m}(=\pi)$ であり，$m+1$ 個ある． $\therefore\ \underline{N=m+1}$ //

また，$\underline{x_k=\frac{(k-1)\pi}{m}}$ //

(2)
$$S_k=\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(\pi-x)\sin mx\,dx\right|$$
$$=\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}(\pi-x)\left(-\frac{1}{m}\cos mx\right)'dx\right|$$
$$=\left|\left[-\frac{\pi-x}{m}\cos mx\right]_{x_k}^{x_{k+1}}-\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{1}{m}\cos mx\,dx\right|$$
$$=\left|-\frac{\pi-\frac{k\pi}{m}}{m}\cos k\pi+\frac{\pi-\frac{(k-1)\pi}{m}}{m}\cos(k-1)\pi-\frac{1}{m}\underbrace{\left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_{x_k}^{x_{k+1}}}_{=0}\right|$$
$$=\left|-\frac{m-k}{m^2}\pi\cdot(-1)^k+\frac{m-k+1}{m^2}\pi\cdot(-1)^{k-1}\right|$$
$$=|(-1)^{k-1}|\cdot\left|\frac{m-k}{m^2}\pi+\frac{m-k+1}{m^2}\pi\right|$$
$$=\underline{\frac{2m-2k+1}{m^2}\pi}\ //\qquad(\because m \geqq k より)$$

(3)
$$\sum_{k=1}^{N-1}S_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{2m-2k+1}{m^2}\pi$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{2m+1}{m^2}\pi-\frac{2\pi}{m^2}\sum_{k=1}^{m}k$$
$$=\frac{2m+1}{m}\pi-\frac{2\pi}{m^2}\cdot\frac{1}{2}m(m+1)$$
$$=\underline{\pi}\ //$$