0002128541787999

宇都宮大学

2015年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $b_1=1,\ b_2=4,\ b_{n+2}=5b_{n+1}-6b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列 $\{b_n\}$ がある．数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=b_n+\dfrac{1}{n(n+1)}+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をみたすとき，次の問いに答えよ．

(1) $p_n=b_{n+1}-2b_n$ とおく．数列 $\{p_n\}$ は等比数列であることを示し，一般項を求めよ．

(2) $q_n=b_{n+1}-3b_n$ とおく．数列 $\{q_n\}$ は等比数列であることを示し，一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $b_{n+2}-2b_{n+1}=3b_{n+1}-6b_n$

$\therefore\ p_{n+1}=3p_n$

$\therefore$ 数列 $\{p_n\}$ は初項 $b_2-2b_1=2$，公比3の等比数列であり，$\underline{p_n=2\cdot3^{n-1}}$ //

(2) $b_{n+2}-3b_{n+1}=2b_{n+1}-6b_n$

$\therefore\ q_{n+1}=2q_n$

$\therefore$ 数列 $\{q_n\}$ は初項 $b_2-3b_1=1$，公比2の等比数列であり，$\underline{q_n=2^{n-1}}$ //

(3) (1)，(2)より，

$$\begin{cases} b_{n+1}-2b_n=2\cdot3^{n-1} & \cdots① \\ b_{n+1}-3b_n=2^{n-1} & \cdots② \end{cases}$$

①－②より，$\underline{b_n=2\cdot3^{n-1}-2^{n-1}}$ //

(4) $n\geqq2$ のとき，

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2\cdot3^{k-1}-2^{k-1}+\frac{1}{k(k+1)}+k\right)\\
&= 1+2\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}k\\
&= 1+2\cdot\frac{1-3^{n-1}}{1-3}-\frac{1-2^{n-1}}{1-2}+1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}(n-1)n\\
&= \underline{3^{n-1}-2^{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}n(n-1)+2}\ //
\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成立する．