0001968901308999

早稲田大学

2015年 政治経済学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ nは任意の自然数，また，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$についてa_kは$0 \leqq a_k \leqq k$を満たす整数である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 数学的帰納法により，次の等式を示せ．

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$$

(2) $2015 = a_1\cdot 1! + a_2\cdot 2! + \cdots + a_n\cdot n!$ が成り立っているとき，nを求めよ．ただし，$a_n \neq 0$とする．

(3) (2)の等式を成立させる$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$を求め，答のみ記入せよ．

(1) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$のとき．

(左辺) $= 1\cdot 1! = 1$, (右辺) $= 2! - 1 = 1$ ∴ 成り立つ

(ii) $n=k$のとき，成り立つと仮定すると．

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! = (k+1)! - 1$$

両辺に，$(k+1)\cdot(k+1)!$ を加えると．

$$\begin{aligned}1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + k\cdot k! + (k+1)\cdot(k+1)! &= (k+1)\cdot(k+1)! + (k+1)! - 1\\ &= (k+2)\cdot(k+1)! - 1\\ &= (k+2)! - 1\end{aligned}$$

∴ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i), (ii)より．任意の自然数nについて，与式が成り立つ ■

(2) $a_k \geqq 0$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$, $a_n \geqq 1$ より．

$2015 \geqq n!$ となる． $6! = 720$, $7! = 5040$ より． $n \leqq 6$

また，(1)の結果より． $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + 5\cdot 5! = 6! - 1 = 719 < 2015$

∴ $n \geqq 6$ 以上より． $\underline{n=6}$ //

(3) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + 5\cdot 5! = 6! - 1 = 719$ より． $a_6\cdot 6! \geqq 2015 - 719$

∴ $a_6 \geqq 2$ また． $a_6\cdot 6! \leqq 2015$ より． $a_6 \leqq 2$ ∴ $a_6 = 2$

同様のことをくり返して．

$\underline{a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=3,\ a_5=4,\ a_6=2}$ //