



2010年第5問

5 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に関する以下の問に答えよ. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

- (1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ を証明せよ.
- (2) a, b, c, d が有理数のとき, $A^3 = 5E$ は成り立たないことを証明せよ. $\sqrt[3]{5}$ は無理数であることを使ってよい.
- (3) a, b, c, d が実数のとき, $A^6 = -E$ を満たす A の $a+d$ と $ad-bc$ の組 $(a+d, ad-bc)$ をすべて求めよ. その各々の組に対し, それを与える A の例を1つずつ記せ.