

お茶の水女子大学

2014年 第2問



2 次の問いに答えよ.

(1) $f(x) = x - \sin x$ とおくと

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

(1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$\therefore f(x): \text{単調増加で, } f(x) \geq f(0) = 0 \quad \therefore f(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

$$g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x \text{ とおくと.}$$

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}, \quad g''(x) = -\sin x \leq 0 \quad \therefore g'(x): \text{単調減少}$$

が成り立つことを示せ. $\therefore g'(x) = 0$ となる x は唯一つ ($\because g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0, g'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi} < 0$)(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において, D_1 を曲線 $y = \sin x$ と 2 直線 $y = x, x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形とし, D_2 を曲線 $y = \sin x$ と直線 $y = \frac{2}{\pi}x$ で囲まれた図形とする. D_1, D_2 の面積を求め, どちらの面積が大きいかわべよ.(3) D_2 を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ.(1) のつづき. $g'(x) = 0$ となる x を α とおくと.

$$\therefore \text{右の増減表と } g(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \text{ より.}$$

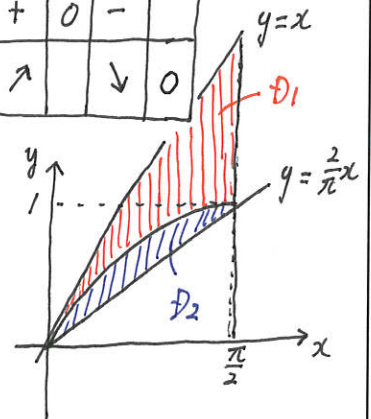
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ において, } g(x) \geq 0$$

$$\text{よって, } \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \quad \square$$

(2) $D_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x - \sin x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

$$D_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x - \frac{2}{\pi}x \, dx = \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	\nearrow		\searrow	0



$$D_1 - D_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} - 2$$

$$= \frac{\pi^2 + 2\pi - 16}{8}$$

$$> \frac{3.14^2 + 2 \cdot 3.14 - 16}{8}$$

$$> \frac{9.85 + 6.28 - 16}{8}$$

$$= \frac{0.13}{8} > 0$$

$$\therefore D_1 - D_2 > 0 \text{ より}$$

 D_1 の面積の方が大きい //

$$= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6}$$

$$= \frac{\pi^2}{12} //$$

(3) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx - (\text{円すい})$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi^2}{6}$$