2011年 海洋工 第2問

数理 石井K

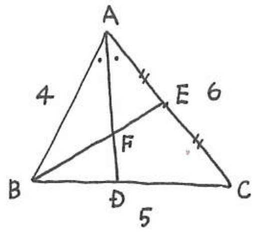
$\boxed{2}$ $AB=4$, $BC=5$, $CA=6$ であるような $\triangle ABC$ において，$\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D，辺 CA の中点を E，線分 AD と線分 BE の交点を F とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおくとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ および $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ を t を用いて表せ．

(3) t の値を求めよ．

(4) $AF:FD$ を求めよ．



(1) 余弦定理より

$$\cos\angle BAC=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{9}{16}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot6\cdot\frac{9}{16}=\underline{\frac{27}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\{t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}\}$

$=t|\overrightarrow{AB}|^2+(1-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\underline{\frac{1}{2}(5t+27)}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\{t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}\}$

$=t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(1-t)|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\underline{-\frac{45}{2}t+36}$

(注) (3) はふつう

$AB:AC=BD:DC$ より

$2:3=1-t:t$ として

解くが，誘導に従った．

少し問題の意図が不明である．

(3) $\angle BAD=\angle DAC=\theta$ とおくと．

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}:\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=4\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\theta:6\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\theta=2:3$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}(5t+27):-\frac{45}{2}t+36=2:3\qquad\therefore\ \underline{t=\frac{3}{5}}$$

(4) メネラウスの定理より．

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{BC}{BD}\cdot\frac{DF}{AF}=1\qquad\therefore\ 1\cdot\frac{1}{1-t}\cdot\frac{DF}{AF}=1\qquad\therefore\ DF:AF=2:5$$

すなわち．$\underline{AF:FD=5:2}$