

2016年理学部第2問

数理
石井

2 座標平面上に3点 $A(t, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ がある。ここで、 t は実数全体を動くものとする。三角形 ABC の重心を D , 外心を E とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 D と点 E の座標を t を用いて表せ。
 (2) 線分 DE の長さの2乗を t を用いて表し、それを $f(t)$ とおく。関数 $y = f(t)$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフをかけ。

(1) D は重心より、 $D\left(\frac{t-1+1}{3}, \frac{1+0+0}{3}\right) \quad \therefore \underline{D\left(\frac{t}{3}, \frac{1}{3}\right)}$ //

$E(x, y)$ とおくと、 $AE = BE$ より $AE^2 = BE^2$

$\therefore (x-t)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2 \quad \therefore (t+1)x + y = \frac{1}{2}t^2 \dots \textcircled{1}$

同様に $BE^2 = CE^2$ より $(x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \quad \therefore x = 0$

これを①に代入して、 $y = \frac{1}{2}t^2 \quad \therefore \underline{E\left(0, \frac{1}{2}t^2\right)}$ //

(2) (1)より

$$f(t) = \left(\frac{t}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}t^2\right)^2$$

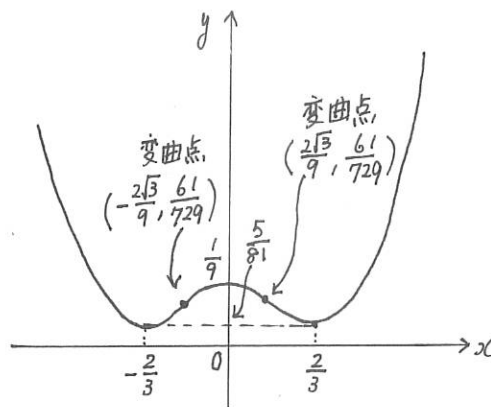
$$= \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{9}t^2 + \frac{1}{9}$$

$$f'(t) = t^3 - \frac{4}{9}t$$

$$= \frac{1}{9}t(3t+2)(3t-2)$$

$$f''(t) = 3t^2 - \frac{4}{9}$$

$$= 3\left(t + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)\left(t - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$$



\therefore グラフは上のようになる

極大値 $\frac{5}{81}$ ($x=0$ のとき)

極小値 $\frac{61}{729}$ ($x = \pm \frac{2}{3}$ のとき)

変曲点 $\left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{61}{729}\right)$

t	...	$-\frac{2}{3}$...	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$...	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$...	$\frac{2}{3}$...	
$f'(t)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	
$f''(t)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	
$f(t)$		\searrow	$\frac{5}{81}$	\nearrow	$\frac{61}{729}$	\nearrow	$\frac{1}{9}$	\searrow	$\frac{61}{729}$	\searrow	$\frac{5}{81}$	\nearrow