0002192367087999

岡山大学

2016年 文系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 複素数 $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\omega^2 + \omega^4$，$\omega^5 + \omega^{10}$ の値を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，$\omega^n + \omega^{2n}$ の値を求めよ．

(3) n を正の整数とするとき，

$$(\omega+2)^n + (\omega^2+2)^n$$

が整数であることを証明せよ．

(1) 計算すると，$\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，$\omega^3 = 1$，$\omega + \omega^2 = -1$ となるから，

$\omega^2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega = \underline{-1}$ //　　$\omega^5 + \omega^{10} = \omega^2 + \omega = \underline{-1}$ //

(2) k を整数として，次のように場合分けをして考える．

(i) $n = 3k$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = (\omega^3)^k + (\omega^3)^{2k} = 1 + 1 = 2$$

(ii) $n = 3k+1$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k}\cdot\omega + \omega^{6k}\cdot\omega^2 = (\omega^3)^k\cdot\omega + (\omega^3)^{2k}\cdot\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

(iii) $n = 3k+2$ のとき

$$\omega^n + \omega^{2n} = \omega^{3k}\cdot\omega^2 + \omega^{6k}\cdot\omega^4 = (\omega^3)^k\cdot\omega^2 + (\omega^3)^{2k}\cdot\omega^3\cdot\omega = \omega^2 + \omega = -1$$

(i)〜(iii) より

$$\underline{\omega^n + \omega^{2n} = \begin{cases} 2 & (n\text{が}3\text{の倍数のとき}) \\ -1 & (n\text{が}3\text{の倍数ではないとき}) \end{cases}}\ //$$

(3) 2項定理より

$$(\omega+2)^n + (\omega^2+2)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\cdot\omega^k\cdot 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\cdot\omega^{2k}\cdot 2^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\cdot 2^{n-k}\cdot(\omega^k + \omega^{2k}) \quad \cdots (*)$$

$k=0$ のときも $\omega^0 + \omega^0 = 2$ となり 整数となっている．

ここで，各 k に対して，${}_nC_k$，2^{n-k} は整数，$\omega^k + \omega^{2k}$ は (2) より整数であるから

和 $(*)$ も整数である．すなわち $(\omega+2)^n + (\omega^2+2)^n$ は整数である ▨