

2015年 第4問

 数理  
石井K

4 関数  $f(x)$  が  $f(x) = \int_0^x (-t+x)(t-x+2) dt$  で定義されている。次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  を  $x$  の整式で表せ。  
 (2)  $y = f(x)$  の極値を求めよ。  
 (3)  $k \geq 0$  を定数とする。  $x$  に関する方程式  $f(x) = k$  が自然数の解をもつときの定数  $k$  をすべて求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) f(x) &= \int_0^x -t^2 + (2x-2)t - x^2 + 2x dt \\
 &= \left[ -\frac{t^3}{3} + (x-1)t^2 + (-x^2+2x)t \right]_0^x \\
 &= -\frac{x^3}{3} + (x-1)x^2 + (-x^2+2x)x \\
 &= \underline{\underline{-\frac{x^3}{3} + x^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) f'(x) &= -x^2 + 2x \\
 &= -x(x-2)
 \end{aligned}$$

$x$	...	0	...	2	...	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
$f(x)$		↓	0	↑	$\frac{4}{3}$	↓

右の増減表より、

極小値 0 ( $x=0$  のとき) , 極大値  $\frac{4}{3}$  ( $x=2$  のとき)

$$(3) f(0) = 0, f(1) = \frac{2}{3}, f(2) = \frac{4}{3}, f(3) = 0$$

なので 右のグラフより、

$$\underline{\underline{k = 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}}}$$

