

2013年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第5問

5 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、 $\Delta(A) = ad - bc$ とおく。たとえば単位行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対しては $\Delta(E) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$ となる。また $K = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ に対しては $\Delta(K) = 2 \times 7 - 3 \times 5 = -1$ となる。次の各問いに答えよ。

- (1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して $R = PQ$ とおく。 $\Delta(P)$, $\Delta(Q)$, $\Delta(R)$ を計算し、 $\Delta(R) = \Delta(P)\Delta(Q)$ が成り立つことを確かめよ。
- (2) すべての2次の正方行列 A , B に対して、 $C = AB$ とおくと $\Delta(C) = \Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ。
- (3) $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる2次の正方行列 X ですべての成分が実数であるようなものは存在しないことを示せ。
- (4) 2次の正方行列 A に逆行列 B が存在したとする。 A と B の成分がすべて整数ならば、 $\Delta(A)$ は1か-1のどちらかである。このことを示せ。