宮城教育大学

2014 年 教育学部（中等数学） 第 3 問

$\boxed{3}$ 辺の長さが OA $=1$，OB $=2$，OC $=3$ である四面体 OABC において，OA $\perp$ AB，OA $\perp$ AC とする．辺 OA の中点を D とし，辺 OB を $1:3$ に内分する点を E，辺 OC を $1:8$ に内分する点を F とする．3 点 D，E，F を通る平面上の点 G が，EG $\perp$ DE，FG $\perp$ DF をみたすとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\vec{b}\cdot\vec{c}=t$ とおくとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ．

(3) 3 点 A，B，C を通る平面と直線 OG が点 H で交わるとする．直線 AH と直線 BC の交点を I とするとき，BI : IC を求めよ．

(1) OA ⊥ AB より，$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=0$　　$|\vec{a}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2=1$ より，$\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}=1}$ //

OA ⊥ AC より，$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$　同様にして，$\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}=1}$ //

(2) G は平面 DEF 上の点より $\overrightarrow{DG}=x\overrightarrow{DE}+y\overrightarrow{DF}$（$x, y$ は実数）と表せる．

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{9}\vec{c}$ より，$\overrightarrow{OG}-\frac{1}{2}\vec{a}=x\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+y\left(\frac{1}{9}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{OG}=\frac{1-x-y}{2}\vec{a}+\frac{x}{4}\vec{b}+\frac{y}{9}\vec{c}$　$\cdots(*)$

$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1-x-y}{2}\vec{a}+\frac{x-1}{4}\vec{b}+\frac{y}{9}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$=\frac{1}{72}(18x+5y+2ty-18)$

$\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(\frac{1-x-y}{2}\vec{a}+\frac{x}{4}\vec{b}+\frac{y-1}{9}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$

$=\frac{1}{72}(5x+18y+2tx-18)$

$\therefore\ \begin{cases}18x+5y+2ty-18=0 & \cdots① \\ 5x+18y+2tx-18=0 & \cdots②\end{cases}$

①−② より，$(x-y)(13-2t)=0$

$t=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$ より，$-6<t<6$ であるから，$13-2t>0$

$\therefore\ x=y$　このとき ① より　$x=y=\frac{18}{2t+23}$

(*) に代入して，$\underline{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2t+23}\left\{\left(t-\frac{13}{2}\right)\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}+2\vec{c}\right\}}$ //

(3) H は平面 ABC 上の点で $\overrightarrow{OH}$ は $\overrightarrow{OG}$ の実数倍なので (2) より $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{t}\left\{\left(t-\frac{13}{2}\right)\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}+2\vec{c}\right\}$（$t\neq0$ のとき）

$t=0$ のときは (2) より，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{23}\left(-\frac{13}{2}\vec{a}+\frac{9}{2}\vec{b}+2\vec{c}\right)=\frac{1}{23}\left(\frac{9}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$　これは OG と平面 ABC が平行なので不適

$\therefore\ \overrightarrow{AH}=\frac{1}{t}\left(\frac{9}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$　$\therefore\ \overrightarrow{AI}=\frac{1}{13}(9\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC})$ より，$\underline{\text{BI : IC}=4:9}$ //