2016年 工学部 第1問

$\boxed{1}$ a, b, c を定数とし，$a \neq 0$ とする．関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

と定める．放物線 $y = f(x)$ の頂点の x 座標を $x = 1$ とする．また，放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標を $x = 2$ と $x = -3$ とする．

(1) a, b, c の値を求めよ．

(2) 放物線 $y = f(x)$ と関数 $y = |x|$ のグラフの交点をすべて求めよ．

(3) 放物線 $y = f(x)$ と関数 $y = |x|$ のグラフで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $ax^2+bx+c-x = a(x-2)(x+3)$ と表せるので

$ax^2+(b-1)x+c = ax^2+ax-6a$

これが x についての恒等式であるから，$b-1=a$ かつ $c=-6a$

さらに軸は，$-\dfrac{b}{2a} = 1$ より $b=-2a$

以上より，$\underline{a = -\dfrac{1}{3},\ b = \dfrac{2}{3},\ c = 2}$ //

(2) (i) $x \geqq 0$ における交点

$ax^2+bx+c-x=0 \iff -\frac{1}{3}(x-2)(x+3)=0$

$x \geqq 0$ より $x=2$ ∴交点は $(2,2)$

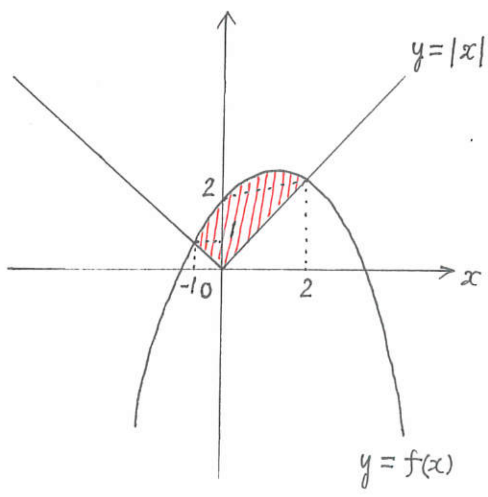
(ii) $x<0$ における交点

$ax^2+bx+c-(-x)=0 \iff x^2-5x-6=0$

$\iff (x+1)(x-6)=0$

$x<0$ より $x=-1$ ∴交点は $(-1,1)$

(i),(ii)より $\underline{(2,2),\ (-1,1)}$ //



(3) $S = \int_{-1}^{2} -\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+2\,dx - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$

$= \left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2+2x\right]_{-1}^{2} - \frac{1}{2} - 2$

$= -\frac{8}{9}+\frac{4}{3}+4-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-2\right)-\frac{1}{2}-2$

$= \underline{\dfrac{7}{2}}$ //