佐賀大学

2015年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ a，b は定数であり，$0 < a < b$ とする．定積分

$$I = \int_0^1 a^{1-t} b^t \, dt$$

について，次の問に答えよ．

(1) I を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$a^{1-t} b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$$

であることを示せ．また，$I > \sqrt{ab}$ を示せ．

(3) $0 < t < 1$ とする．$x > 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^t < 1 + t(x-1)$$

(4) (3) の不等式を利用して，$I < \dfrac{a+b}{2}$ を示せ．