琉球大学

2014年 第2問　普通

数理 石井K

$\boxed{2}$ a，bを実数とし，放物線$y=x(x-a)$をCとする．次の問いに答えよ．

(1) C上の点$(t,\ t(t-a))$におけるCの接線の方程式を求めよ．

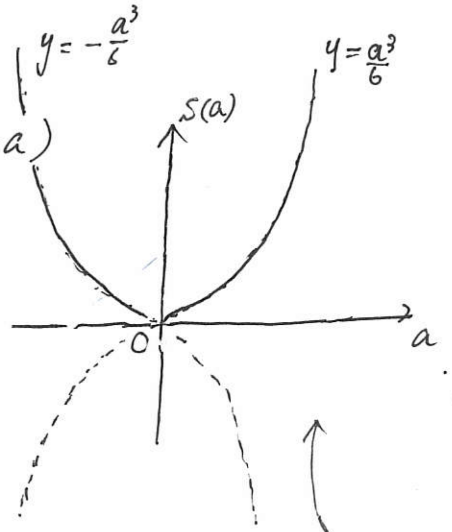
(2) 点$(b,\ 0)$からCに，相異なる2本の接線が引けるとする．このときa，bがみたす不等式を求め，その不等式が表す領域を，ab平面に図示せよ．

(3) Cとx軸が囲む部分の面積を$S(a)$とする．関数$y=S(a)$ $(-2\leqq a\leqq 2)$のグラフをかけ．

(1) $y'=2x-a$

$\therefore$ 接線は $y=(2t-a)(x-t)+t(t-a)$

したがって，$\underline{y=(2t-a)x-t^2}$ //



(2) (1)の接線が$(b,0)$を通るとき．

$0=(2t-a)b-t^2$

$\therefore$ $t^2-2bt+ab=0$

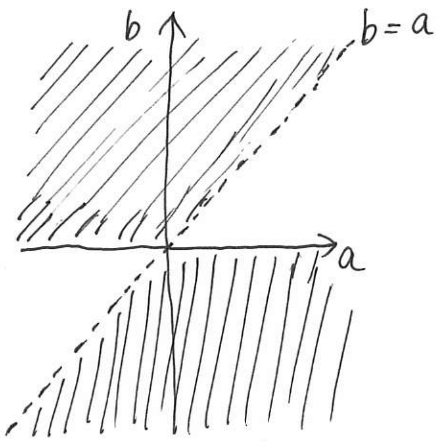
この方程式が相異な2つの実数解をもてばよいので

判別式をDとすると．

$D/4=b^2-ab>0$

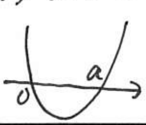
$\therefore$ $b(b-a)>0$

- $b>0$のときは $b>a$
- $b<0$のときは $b<a$
- $b=0$のときは 満たさない



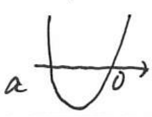
上の図になる(境界線は含まない)

(3) (i) $a>0$のとき



$S(a)=\int_0^a -x(x-a)dx$
$=\frac{1}{6}a^3$

(ii) $a<0$のとき



$S(a)=\int_a^0 -x(x-a)dx$
$=\frac{1}{6}(-a)^3=-\frac{1}{6}a^3$

(iii) $a=0$のとき $S(a)=0$